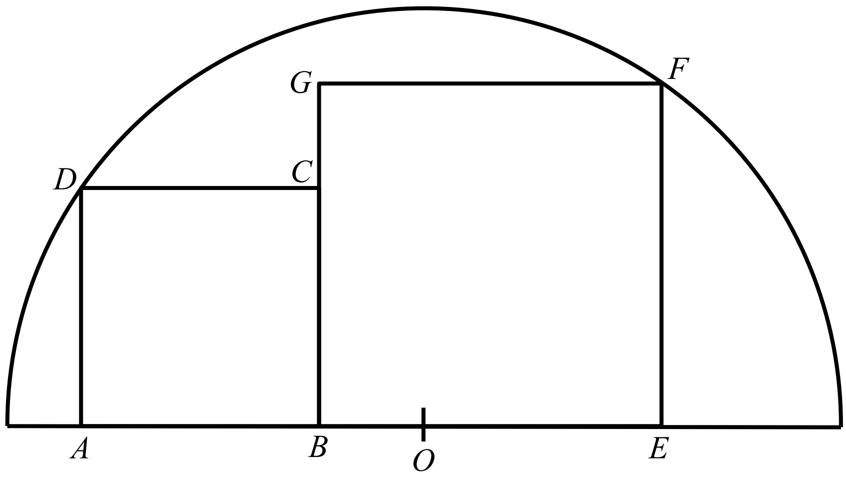
Hong Kong Mathematics Olympiad (2018/19)
Heats (Group)
香港数学竞赛 (2018/19)
初赛项目(团体)

除特别指明外，所有答案须以数字的真确值表达，并化至最简。不接受近似值。
Unless otherwise stated, all answers should be given in exact numerals in their simplest form. No approximation is accepted.

1. 对所有正实数 x，定义 $f(x)=\log_{2019} x^{2020}$。若 $D=f\left(\sqrt{3}\right)+f\left(\sqrt{673}\right)$，求 D 的值。

   For all positive real numbers x, define $f(x)=\log_{2019} x^{2020}$. If $D=f\left(\sqrt{3}\right)+f\left(\sqrt{673}\right)$, find the value of D.

2. 图一所示为一个半径为 5 cm 且圆心位于 O 的半圆。A、B 和 E 为直径上的点而 D 和 F 则为圆周上的点。设 S cm^2 为两个正方形 $ABCD$ 和 $BEFG$ 面积之和。求 S 的值。
   Figure 1 shows a semi-circle with radius 5 cm and centre at O. A, B and E are points on the diameter. D and F are points on the circumference. Let S cm^2 be the total area of the two squares $ABCD$ and $BEFG$. Find the value of S.

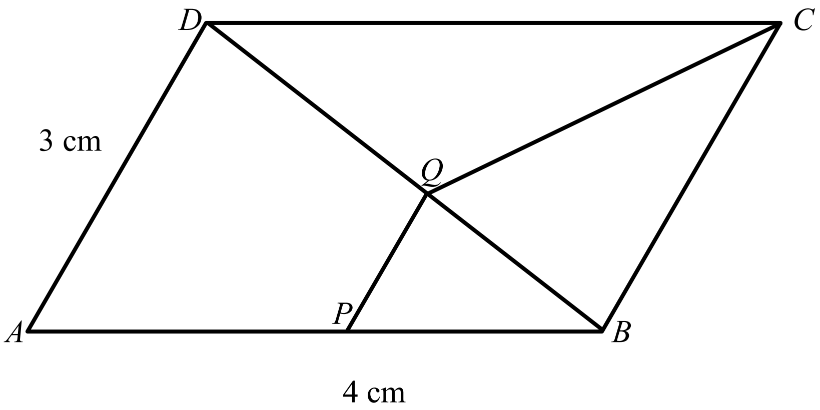


图一
Figure 1

3. 若从一个正 9 边形的 9 个顶点中选 3 个顶点组成一个等腰三角形，共可组成多少个等腰三角形？
   If three vertices are chosen from the nine vertices of a regular nonagon to form an isosceles triangle, how many such isosceles triangles are there?

4. 在图二中，$ABCD$ 为一个平行四边形，其中 $AB = 4$ cm、$AD = 3$ cm 及 $\sin A = \frac{2}{3}$。 P 和 Q 分别是 AB 和 BD 上的点使 $PQ // AD$ 且四边形 $PBCQ$ 的面积为 3 cm^2。设 q cm 为 AP 的长度。求 q 的值。

In Figure 2, $ABCD$ is a parallelogram, where $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm and $\sin A = \frac{2}{3}$. P and Q are points on AB and BD respectively such that $PQ // AD$ and the area of the quadrilateral $PBCQ$ is 3 cm^2. Let q cm be the length of AP. Find the value of q.



图二

Figure 2

5. 已知 $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$，其中 $x \neq 0$。设 y 为满足方程 $f(x) = 1$ 的 x 的最大值。 求 y。

Given that $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$, where $x \neq 0$. Let y be the maximum value of x that satisfies the equation $f(x) = 1$. Find y.

6. 设 a_k 为多项式 $(2x-2)^3(2x+2)^3(2x+1)^3$ 中 x^k 的系数。若 $Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$， 求 Q 的值。

Let a_k be the coefficient of x^k in the polynomial $(2x-2)^3(2x+2)^3(2x+1)^3$. If $Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$, find the value of Q.

7. 设 $f(x) = -6x^2 + 4x\cos\theta + \sin\theta$，其中 $0° \leq \theta \leq 360°$。已知对所有实数 x， $f(x) \leq 0$。若 θ 的最大值与最小值之差为 $d°$，求 d。

Let $f(x) = -6x^2 + 4x\cos\theta + \sin\theta$, where $0° \leq \theta \leq 360°$. It is given that $f(x) \leq 0$ for all real numbers x. If $d°$ is the difference between the greatest and the least values of θ, find d.

8. 设 $\{a_n\}$ 为一个正实数序列使当 $n>1$ 时，$a_n = a_{n-1}a_{n+1} - 1$。已知 2018 在序列中及 $a_2 = 2019$。若 s 为 a_1 的所有可取值的数目，求 s。

Let $\{a_n\}$ be a sequence of positive real numbers such that $a_n = a_{n-1}a_{n+1} - 1$ for $n > 1$. It is given that 2018 is in the sequence and $a_2 = 2019$. If s is the number of all possible values of a_1, find s.

9. 有多少对正整数 x、y 可满足 $xy = 6(x + y + \sqrt{x^2 + y^2})$？
How many pairs of positive integers x, y are there satisfying $xy = 6(x + y + \sqrt{x^2 + y^2})$?

10. D 是等边三角形 ABC 内的一点使 $AD = BD = 5\sqrt{2}$ 及 $CD = 10$。设 S 为 ΔABC 的面积。求 S 的值。
D is a point inside the equilateral triangle ABC such that $AD = BD = 5\sqrt{2}$ and $CD = 10$. Let S be the area of ΔABC. Find the value of S.

完
END